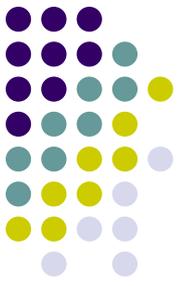


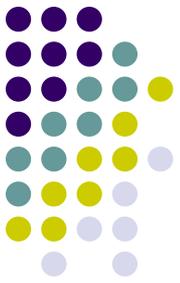
# **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАНИЙ, ЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ**

# СОДЕРЖАНИЕ



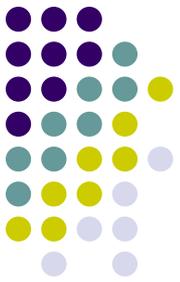
1. Логическая модель ПЗ : *sinopsis*
2. Понятие формальной/логической теории
  - ❖ компоненты, семантика, свойства
3. Исчисление высказываний (ИВ)
  - ❖ язык, интерпретации, свойства
4. Исчисление предикатов первого порядка (ИП)
  - ❖ язык предикатов, семантика, свойства
5. Доказательство теорем: метод резолюций
6. Языки *Prolog* и *Datalog*
7. Заключение, Домашнее задание

# ЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ



- Исторически первая: применение для ПЗ уже существующего языка предикатов (ЯП)
  - ❖ ЯП разработан ходе исследования логических основ ЕЯ
- В логической модели знания представляются как совокупность правильных формул какой-либо *формальной логической системы*
- Достоинства формальных логических систем:
  - изученность свойств
  - возможность применения механизма формального вывода (доказательства)
- Операции над знаниями – на основе логического вывода

# ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА



## Формальная логическая система/логика/теория

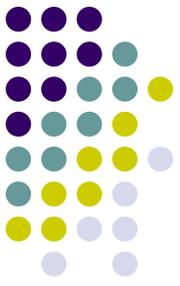
- Истоки появления: изучение и формализация

### Истинность Vs. Доказуемость

Идея замены доказательства/рассуждения – вычислением, формальными символьными преобразованиями строк

- Формализация, аксиоматизация математических теорий, теоремы – формулы, выводимые из формул-аксиом
- Формальные логические теории отличаются по выразительной мощности и эффективности вывода
  - Исчисление (логика) высказываний
  - Исчисление (логика) предикатов первого порядка
  - Многосортные логики первого порядка
  - Дескриптивные логики
  - Модальные логики (возможность/необходимость)
  - Нечеткая и вероятностная логики

# ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА: КОМПОНЕНТЫ

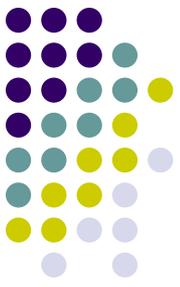


Формальная логическая система / логика / теория задается четверкой компонент:  $T = \langle E, R, A, P \rangle$

- $E$  – множество базовых элементов формул
- $R$  – синтаксические правила, на основе которых из элементов  $E$  образуются синтаксически правильные (правильно построенные) формулы теории
- $A$  – множество аксиом: подмножество всего множества синтаксически правильных формул, которым априорно приписывается статус истинности.
- $P$  – множество правил формального вывода (оперирования символами), применяя которые к формулам (аксиомам), можно получать новые п.п. формулы (теоремы):  $F \vdash G$  ( $G$  выводима из  $F$ )

$E+R$  – **сигнатура теории** (ее язык)

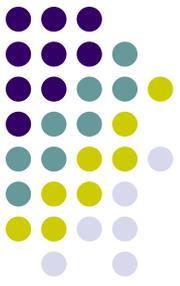
# ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Интерпретация  $I$ , или формальная семантика:

- Задаются: Область интерпретации  $D$  и  
Функция, сопоставляющая каждой формуле  $F$  теории  
некоторое содержательное высказывание  $P$  (истинное  
или ложное) относительно объектов множества  $D$
- Формула  $F$ :
  - Выполнима, если существует интерпретация, где  $P$  истинно
  - Общезначима, если истинна в любой интерпретации
  - Противоречива (невыполнима), если ложна в любой  
интерпретации
- Логическое следствие:  $F \vDash G$ , если  $G$  выполнима  
(истинна) в любой интерпретации, в которой выполнима  $F$
- Формальная семантика называется также **модельной**:  
*модель теории*  $T$  – интерпретация, в которой ни одна  
теорема не является противоречивой (все выполнимы)

# ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА



Для формальной теории  $T$ :

- **Полнота** (содержательная, относительно интерпретации): Любому истинному высказыванию  $P$  соответствует теорема в  $T$  (т.е. истинность  $P$  м.б. обоснована выводом)
- **Непротиворечивость**
  - Формальная: не выводимы одновременно формулы  $F$  и  $\neg F$
  - Содержательная: существует модель
- **Разрешимость**: существует алгоритм, который для любой формулы  $F$  определяет, является ли она теоремой (истинность/ложность формулы)
- **Полуразрешимость**: существует алгоритм, который для любой формулы-теоремы дает положительный ответ (для нетеорем алгоритм может зациклиться)
- ❖ **Вычислительная сложность** – важный вопрос

# ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ



- ❖ Элементы логических рассуждений – простые высказывания (истинные или ложные)  
*МГУ основано в 1755 году*
- ❖ Пропозиция (*proposio*) – предложение/высказывание, рассматриваемое только с точки зрения истинности
- *E* – пропозициональные переменные:  $p, q, r, \dots$   
логические связки:  $\neg$  (отрицание),  $\rightarrow$  (импликация)  
логические значения (истина и ложь):  $\top$  и  $\perp$   
служебные символы: скобки и запятые
- *R* – индуктивные правила: п.п.формула –
  - 1) переменная
  - 2) логическое значение
  - 3)  $\neg F$  ;  $F_1 \rightarrow F_2$  , где  $F, F_1, F_2$  – п.п.формулы
- Другие логические связки вводятся как синтаксические сокращения:  
 $x \wedge y \equiv \neg (x \rightarrow \neg y)$      $x \vee y \equiv \neg x \rightarrow y$
- Пример п.п.формулы:  $\neg q \wedge (p \rightarrow \neg r)$

# ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



- Традиционная: Булева алгебра  
(или алгебра высказываний, алгебра булевских функций)
- Каждой пропозициональной переменной ставится в соответствие истинностное значение (истина/ложь – 1 / 0)
  - Логические связки трактуются традиционно, как соответствующие булевские функции
  - Тогда любая п.п. формула получает истинностное значение
  - В такой интерпретации:  $p \rightarrow \neg p$  выполнима  
 $p \vee \neg p$  общезначима;  $p \wedge \neg p$  противоречива
  - Для Булевой алгебры есть процедура (алгоритм) определения для любой формулы-функции всех ее значений (построение **таблицы истинности**)

# ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ: ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД



Аксиомы и правила вывода ИВ? –

дедуктивная система  $(A + P)$

Возможно несколько аксиоматизаций, например,  
**КИВ** (классическое исчисление высказываний):

- $A$  – 3 аксиомы, в том числе  $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- $P$  – правило отделения (*modus ponens*):  $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$

Пример теоремы:

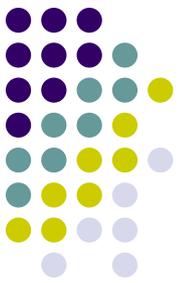
$$\vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

- Теоремы (законы) ИВ – схемы истинных сложных высказываний (утверждений):

$$\vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\vdash (\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow p$$

# ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ: СВОЙСТВА ТЕОРИИ



## Основные свойства ИВ :

- **Полнота:** теоремы и только они являются общезначимыми формулами
- **Непротиворечивость** (оба вида)
- **Разрешимость**
  - ❖ Стандартная разрешающая процедура проверки общезначимости формулы (по таблице истинности)
  - ❖ Алгоритм *DPLL* проверки выполнимости формул ИВ в конъюнктивной нормальной форме (NP-полная задача: правило резолюции + поиск с возвратами)

Эффективность вывода, однако :

Язык (сигнатура) ИВ – слабая выразительность

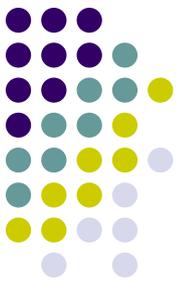
# ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ: ДРУГАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



## Семантика множеств (предикатная семантика)

- Область интерпретации  $D$  ; пропозицион. переменным (высказываниям) ставятся в соответствие подмножества  $D$
- Интерпретация логических связок и значений:  
$$\top - D; \quad \perp - \emptyset; \quad \neg F - D \setminus F; \quad A \vee B - A \cup B$$
$$(F, A, B - \text{формулы}) \quad A \wedge B - A \cap B$$
$$A \rightarrow B - A \supset B : \text{вложение мн-в, } A \text{ влечет } B \text{ ("если } A \text{ то } B\text{")}$$
- Доказана **эквивалентность** двух семантик (свойств), т.о.
- ИВ описывает не только законы логических операций над простыми высказываниями, но и законы, которым подчиняются операции над множествами
- Традиционную булевскую семантику можно рассматривать как одноэлементную интерпретацию

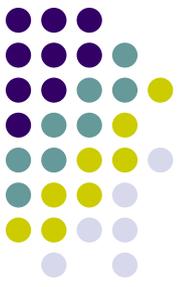
# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ



Существенно бóльшая выразительность:

- Элементы логических рассуждений – **высказывательные формы**, зависящие от переменных:  
*Он живет в городе Нижний Новгород*
- Входящие в формы объекты могут задаваться не только именами, но и более сложным способом:  
**именные формы**, зависящие от переменных и констант:  
*sin(x) > 0.5                      Том любит свою сестру*
- Сложный способ именованя объектов задается в ИП понятием **терма**:                      *сестра (Том)*
- Высказывательная форма – это **предикат** (если нет переменных, вырождается в простое высказывание)
- Роль формул ИП – описывать сложные высказывания, состоящие из предикатов, к которым могут быть применены операторы **существования и общности**

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМУЛ



Множество  $E$  базовых элементов формул включает:

- $E_1$  – предметные постоянные/константы  $a, b, c, \dots$
- $E_2$  – множество функциональных символов  $f, g, h, \dots$
- $E_3$  – множество предикатных символов  $P, Q, R, \dots$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3$  называется обычно *сигнатурой теории*

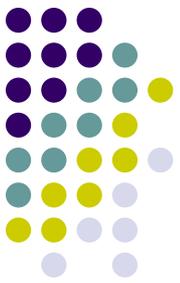
Вспомогательные символы:

- $E_4$  – множество предметных переменных  $x, y, z, \dots$
- $E_5$  – логические связки  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$  и  
кванторы:  $\forall$  (всеобщность) и  $\exists$  (существование)
- $E_6$  – служебные символы: запятые, скобки

Для каждого функционального и предикатного символа определена *арность* (число аргументов):  $n \geq 0$

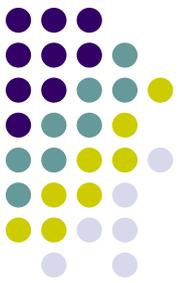
(при  $n=0$  вырождаются в константы и пропозиц. переменные)

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: СИНТАКСИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА



- Терм – это либо
  - предметная переменная
  - предметная постоянная/константа
  - выражение вида  $f(t_1, \dots, t_n)$ , где  $f$  – функц. символ, а  $t_1, \dots, t_n$  – термы
- Элементарная (атомарная) формула – это выражение вида  $P(t_1, \dots, t_k)$ , где  $P$  – предикатный символ, а  $t_1, \dots, t_k$  – термы
- Формула (п.п. формула) – это либо
  - элементарная формула
  - выражение  $\neg F$ ,  $F \rightarrow G$ ,  $\forall x (F)$ ,  $\exists x (F)$ , где  $F$  и  $G$  – п.п.ф.
- Теория первого порядка:
  - кванторы могут связывать только предм. переменные, запрещены кванторы по предикатам и функц. символам
  - предикаты не могут быть аргументами др. предикатов

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ПРИМЕРЫ ФОРМУЛ



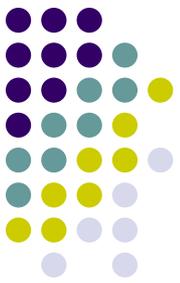
$$(1) \quad \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$$

$$(2) \quad \exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x,y)$$

$$(3) \quad \forall x (\text{Студент}(x) \wedge \text{Старший}(\text{курс}(x))) \rightarrow \\ \exists y \text{Научный\_руководитель}(y, x))$$

- Термы содержательно интерпретируются как имена объектов/сущностей
- Дизъюнкция и конъюнкция вводятся как синтаксические сокращения
- Скобки указывают порядок операций и область действия кванторов, их можно опускать с учетом установленного приоритета:  $\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow$
- Формула **замкнута**, если в ней нет свободных (т.е. не связанных кванторами) переменных – см. примеры 1-3

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ЧИСТОЕ И ПРИКЛАДНОЕ



Дедуктивная система (Аксиомы и правила вывода) ?

Один из вариантов:

- $A$  – 3 аксиомы **КИВ** + 2 аксиомы: универсальная конкретизация и экзистенциальное обобщение
- $P$  – правило отделения (*modus ponens*) + 2 правила связывания квантором общности и существования

**Чистое ИП** – в нем нет предметных констант, функций, *собственных* (дополнит.) аксиом (слайд 15, примеры 1, 2)

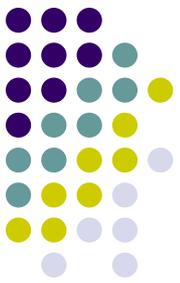
Выражает «чистую» логику (сугубо логические законы)

**Прикладное ИП** – в сигнатуре есть постоянные и функции (слайд 15, пример 3 , а также:

формальная арифметика, теория равенства и др.)

Вложение теорий:  $ИВ \subset \text{ЧистИП} \subset \text{ПриклИП}$

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Интерпретация  $I$  прикладного ИП на области  $D$  :

- Каждой предметной постоянной ставится в соответствие элемент из  $D$
- Каждому функциональному  $n$ -местному символу – функция (операция)  $f: D^n \rightarrow D$
- Каждому  $n$ -местному предикатному символу – отношение  $R$  на множестве  $D$
- Логические связки трактуются традиционно (бул. функции)
- Кванторы для одноместных предикатов :

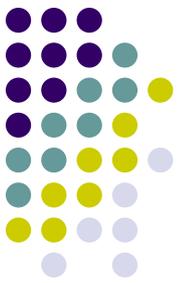
$$\forall x P(x) = \bigwedge P(c_i) \quad c_i \in D \quad (\text{бескон. мн-во формул})$$

$$\exists x P(x) = \bigvee P(c_i) \quad c_i \in D$$

Для многоместных предикатов – аналогично.

Так получается содержательное высказывание на  $D$  ,  
и всякая замкнутая формула истинна /ложна в заданной  $I$

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ПОЛНОТА



Общезначимость/Выполнимость/Непротиворечивость  
формул:

$$\forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \quad ?$$

$$\exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x,y) \quad ?$$

(Замечание: незамкнутая формула истинна в интерпретации  $I$ , т. и т. тогда, когда ее универсальное замыкание истинно)

Свойства логики первого порядка?

- Полнота чистого ИП (теорема Гёделя, 1929 г.): любому истинному высказыванию  $P$  соответствует теорема в  $T$
- Корректность: все теоремы общезначимы (истинны)
- Тем самым имеется однозначная связь логич. истинности высказывания и его выводимости.

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ДРУГИЕ СВОЙСТВА



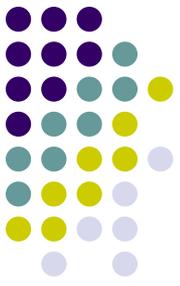
- Неполнота некоторых прикладных ИП (в частности, Формальная арифметика – Гёдель, 1930 г.): в них есть недоказуемые истинные утверждения.  
Причина : наличие аксиом с рекурсией
- Непротиворечивость (формальная и содержательная)
- Неразрешимость (теорема Черча, 1936 г.): не существует общего метода (алгоритма) установления общезначимости (тождественной истинности) произвольной формулы  $F$ , т.е. является ли она теоремой или нет.
- Полуразрешимость: есть процедура проверки общезначимости, которая для формулы-теоремы дает положительный ответ, а в случае формулы-нетеоремы возможно зацикливание.

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ



- Задача доказательства некоторой формулы  $F$  (теоремы), т.е. ее вывода из формул-аксиом  $A_1, \dots, A_n$  сводится к выяснению логического следования  $F$   
 $A_1, \dots, A_n \models F$ , что равносильно доказательству:
  - общезначимости формулы  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow F$  или
  - невыполнимости формулы  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg F$
- Поскольку ИП полуразрешимо:  
априорное предположение об общезначимости формулы, которое надо доказать
  - метод Эрбрана, 1930
  - обратный метод Маслова, 1964
  - метод резолюций Робинсона, 1965 –  
обратный вывод,, практически применимый!

# ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ: МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ



Доказательство выводимости  $F$  из аксиом  $A_1 \dots A_n$   
методом доказательства невыполнимости формулы

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg F.$$

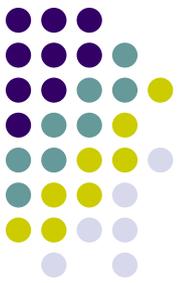
- Все формулы переводятся в конъюнктивную форму, а кванторы отбрасываются – работа с множеством  $M$  формул-дизъюнкций
- Обобщенное правило логического вывода: **резолуция**
- На каждом шаге вывода из пары дизъюнкций из  $M$  строится **резольвента**:

$$B_1 \vee \dots \vee P \vee \dots \vee B_k \quad \text{и} \quad C_1 \vee \dots \vee \neg P \vee \dots \vee C_m$$

их резольвента:  $B_1 \vee \dots \vee B_k \vee C_1 \vee \dots \vee C_m$

- Полученная резольвента добавляется в  $M$
- Цель – получить пустую резольвенту (тем самым доказать невыполнимость, т.е. выводимость  $F$ )

# МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ: ДЕТАЛИ



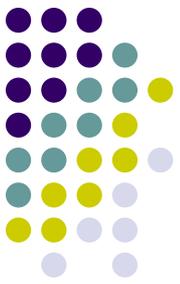
Шаг метода резолюций:

1. Выбор из  $M$  пары формул, в которых есть контрарные литералы: предикат  $P$  и его отрицание
2. Унификация (обычно – наиболее общая): подстановка вместо переменных выбранных формул определённых термов для совпадения всех аргументов  $P$  и  $\neg P$
3. Получение резольвенты и добавление её в  $M$

Особенности:

- В общем случае неоднозначность: какую пару формул выбрать? (возможны различные стратегии, перебор)
- Резольвента может быть длиннее исходных формул, в то время как цель – получить пустую резольвенту
- ❖ В целом: полная система доказательства формул логики первого порядка для БЗ в конъюнктивной форме

# МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ: ПРИМЕР



Исходные утверждения:

$Kot(Мурзик) \quad \forall x( Kot(x) \rightarrow Живое\_существо(x))$

$\forall y( Живое\_существо(y) \rightarrow Дышит(y))$

Доказать:  $Дышит(Мурзик)$

Множество  $M$ :  $Kot(Мурзик)$  (1)

$\neg Kot(x) \vee Живое\_существо(x)$  (2)

$\neg Живое\_существо(y) \vee Дышит(y)$  (3)

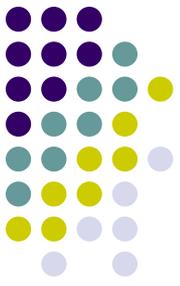
$\neg Дышит(Мурзик)$  (4)

Резольвента (2) и (3):  $\neg Kot(z) \vee Дышит(z)$  (5)

Резольвента (4) и (5):  $\neg Kot(Мурзик)$  (6)

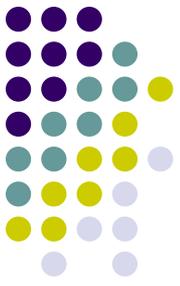
Резольвента (1) и (6): пустая резольвента

# ЯЗЫК ПРОЛОГ



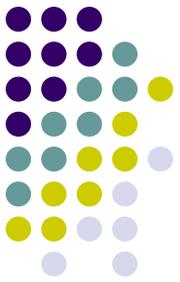
- Язык Пролог – язык предикатов первого порядка, но особые синтаксис и процедура доказательства.
- Клаузальная форма записи формул (клаузы Хорна), при которой кванторы опускаются, например:  
пролог-правило  $P:- Q, R, T.$  – это формула  $Q \wedge R \wedge T \rightarrow P$ , равносильная  $\neg Q \vee \neg R \vee \neg T \vee P$  – *хорновский дизъюнкт*, только одно слагаемое без отрицания.
- Пролог-предложение является хорновским дизъюнктом. Факты и правила Пролога – аксиомы, вопрос – теорема  
$$\text{Дышит}(y) :- \text{Живое\_существо}(y).$$
- Стратегия доказательства – *линейная резолюция (SLD)* для хорновских дизъюнктов, более эффективная
- Проблемы обратного вывода (от доказываемого факта): незавершаемые и избыточные вычисления

# ЯЗЫК *DATALOG*



- Синтаксически: подмножество Пролога:  
ЯП без функциональных символов (функций)
- *DataLog* ориентирован на работу с БД: язык запросов
- Отличающаяся от Пролога семантика:
  - Операции над конечными множествами
  - Порядок предложений не важен: **декларативность** !
  - Прямой вывод: доступен для понимания и сочетается с реляционными операциями БД
  - Различение **экстенциональных** и **интенциональных** предикатных символов (разделение БЗ)
  - Ограничения на рекурсию, логическое отрицание и др.
- Важно: **разрешимость** вывода (полиномиальное время?)
- Язык запросов: – алгоритмически не полон (по Тьюрингу)  
– мощнее других языков запросов к БД (рекурсия)

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

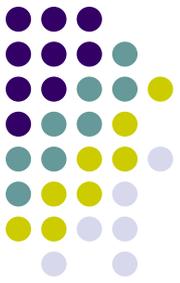


- ИВ и ИП – две формальные системы вывода (дедукции), отражающие общелогические законы, но отличающиеся **выразительностью языка**.
- Модельная **семантика** строится на базе непосредственного установления соответствия синтаксических понятий языка логики с понятиями объектного мира, описываемого этим языком.
- Формальная логическая система дает возможность **вывода** из известных утверждений (знаний) – **новых утверждений (знаний)**, позволяя более экономно хранить информацию в БЗ.
- ПЗ в логической модели – на основе прикладной (конкретизированной) формальной теории.



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ



Повторить основные понятия и синтаксические правила формул исчисления предикатов первого порядка